Volumen Finito II

Eusebio Ingol, Ph.D.

12/12/2012

Dejeme introducir la ecuación de transporte para la propiedad ϕ.

$$\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} + \underbrace{div(\rho\phi \mathbf{U})}_{\text{convective}} = \underbrace{div(\Gamma\, grad\, \phi)}_{\text{diffusive}} + q_\phi \quad (1)$$

Γ = diffusion coefficient.

Esto significa:

La tasa de incremento de ϕ del elemento de fluido + tasa neta de flujo de ϕ out del elemento fluido = tasa de incremento de ϕ debido a la difusión + tasa de incremento de ϕ debido a fuentes.

El paso clave del metódo de volumen finito es la integración de la ecuación anterior sobre un volumen de control (CV) tridimensional (3D):

$$\int_{CV}\frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t}dV + \underbrace{\int_{CV} div(\rho\phi\mathbf{U})dV}_{\text{convective term (a)}} = \underbrace{\int_{CV} div(\Gamma\, grad\,\phi)dV}_{\text{diffusive term (b)}} + \int_{CV} q_\phi\, dV \quad (2)$$

(a) y (b) puede reescribirse como integrales sobre toda la superficie de frontera del volumen de control usando el TEOREMA DIVERGENCIA DE GAUSS (TDG)

$$\int_{CV} div(\mathbf{a})dV = \int_A \vec{\mathbf{n}}\cdot\vec{\mathbf{a}}\, dA$$

La interpretación física de $\mathbf{n}\cdot\mathbf{a}$ es la componente del vector $\mathbf{a}$ en la dirección del vector $\mathbf{n}$ normal ~~normal~~ al ~~de~~ elemento de superficie dA ~~del elemento~~

Aplicando TDG a la ecuación (2):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{CV}\rho\phi dV + \int_A \vec{\mathbf{n}}\cdot(\rho\phi\vec{U})dA = \int_A \vec{n}\cdot(\Gamma\, grad\,\phi)dA + \int_{CV} q_\phi\, dV \quad (3)$$

tasa de incremento de ϕ dentro del volumen de control + tasa neta de reducción de ϕ debido a la convección a través del ~~V~~ las fronteras de V.C. = tasa neta de incremento de ϕ debido a la difusión a través de las fronteras del V.C. + tasa neta de creación de ϕ dentro del V.C

Eusebio INGOl, Ph.D

for steady flow:

$$\int_A \vec{n}\cdot(\rho\phi\vec{u})\,dA = \int_A n\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi)\,dA + \int_{CV} q_\phi\,dV \qquad (4)$$

Ahora aplicamos el Método de Volumenes Finitos considerando el proceso de transporte más simple: Pura Difusión en Flujo estable, y puede ser derivada de la ecuación (6):

$$\mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi) + q_\phi = 0 \qquad (5)$$

- La integración del volumen de control:

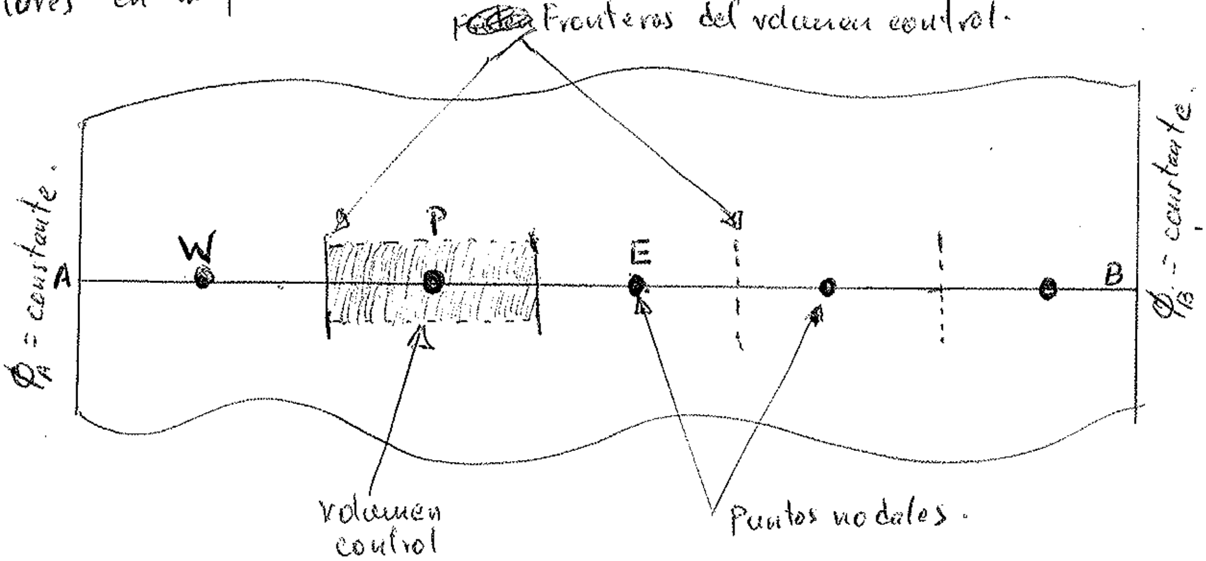
$$\int_{CV} \mathrm{div}(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi)\,dV + \int_{CV} q_\phi\,dV =$$

$$\int_A \vec{n}\cdot(\Gamma\,\mathrm{grad}\,\phi)\,dA + \int_{CV} q_\phi\,dV = 0 \qquad (6)$$

- Considere la difusión en estado estable de una propiedad ϕ en 1D:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) + q = 0 \qquad (7)$$

- donde Γ es el coeficiente de difusión, q es el termino fuente.
- Valores en la fronteras de ϕ en los puntos A y B son prescribidos.



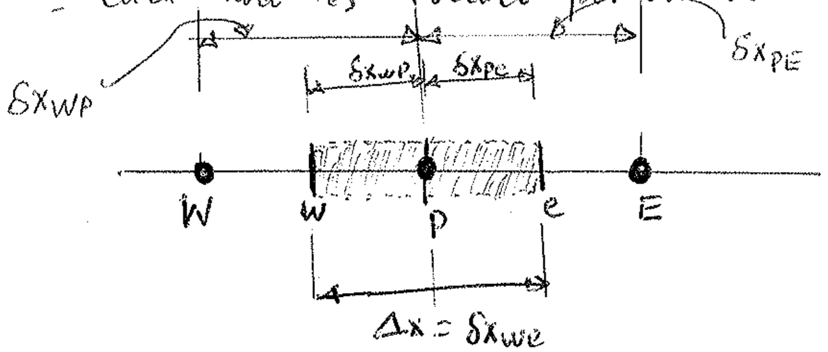
Eusebio Ingol, Ph.D.

Paso ①: Generación del Grid.

El primer paso en el método de volumenes finitos es dividir el dominio en volumenes de control discretos.

por ejemplo: entre A y B:

- Las fronteras o caras del volumen de control son posicionadas en la mitad entre los nodos adyacentes.
- Cada nodo es rodeado ~~por un~~ volumen de control o celda.



Esquema usual para ~~cálculo~~ CFD.

$\Delta x = \delta x_{we}$ es el ancho del volumen de control.

Paso ②: Discretización:

El paso clave del método de volumen finito es la integración de la ecuación que gobierna el fenómeno físico sobre un volumen de control para producir una ecuación discretizada en su punto nodal P.

Para el volumen de control definido arriba:

$$\int_{\Delta V} \frac{\partial}{\partial x}\left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) dV + \int_{\Delta V} q \, dV = \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e - \left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w + \bar{q}\,\Delta V = 0 \qquad (8)$$

donde A es el área de la sección transversal de la cara del V.C.

ΔV es el volumen

$\bar{q}$ es el valor promedio de la fuente de q sobre el volumen de control.

Esto tiene significado físico.

"El flujo difusivo de ϕ saliendo de la cara Este menos el flujo difusivo de ϕ entrando por la cara Oeste es igual a la generación de ϕ." Esto realmente constituye un balance de la ecuación para ϕ sobre el V.C.

- usando una diferenciacion central (central differencing), en los valores interpolados linealmente en un grid uniforme; para Γ_w y Γ_e:

$$\Gamma_w \cong \frac{\Gamma_W + \Gamma_P}{2} \quad (9.1) \qquad , \qquad \Gamma_e \cong \frac{\Gamma_P + \Gamma_E}{2} \quad (9.2)$$

- Y para los terminos del flujo difusivo, las stes: aproximaciones puede ser usadas:

$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_e = \Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) \qquad (10)$$

$$\left(\Gamma A \frac{\partial \phi}{\partial x}\right)_w = \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) \qquad (11)$$

- para la fuente:

$$\bar{q}\Delta V = q_u + q_p \phi_P \qquad (12)$$

· substituyendo (10), (11), y (12) en (8)

$$\Gamma_e A_e \left(\frac{\phi_E - \phi_P}{\delta x_{PE}}\right) - \Gamma_w A_w \left(\frac{\phi_P - \phi_W}{\delta x_{WP}}\right) + \left(q_u + q_p \phi_P\right) = 0 \qquad (13)$$

Agrupando terminos:

$$\left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w - q_P\right)\phi_P = \left(\frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w\right)\phi_W + \left(\frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e\right)\phi_E + q_u \qquad (14)$$

usando coeficientes a_W y a_E para ϕ_W y ϕ_E, y a_P para ϕ_P; ecuación (14) puede ser escrita como:

$$a_P \phi_P = a_W \phi_W + a_E \phi_E + q_u \qquad (15)$$

donde:

$$a_W \stackrel{\text{(10)}}{=} \frac{\Gamma_w}{\delta x_{WP}} A_w \quad , \quad a_E = \frac{\Gamma_e}{\delta x_{PE}} A_e$$

$$a_P = a_W + a_E - q_P .$$

Los valores de q_u y q_p pueden ser ~~obtenidos~~ de obtenidad de (12)
Ecuaciones (12) y (15) son las ecuaciones discretizadas por V.F. de (5)

Eusebio Ingol (5)

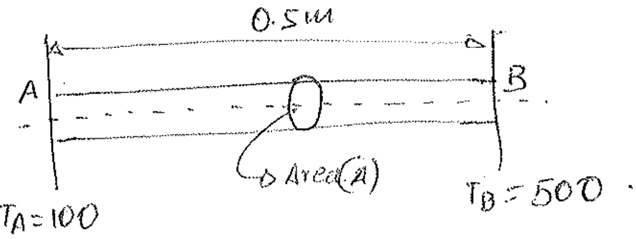
Paso (3): Solución de Ecuaciones:

- La ecuación discretizada (15) deben ser establecidas en cada punto nodal a fin de resolver el problema.
- Para los V.Cs que son adyacentes a las fronteras de dominio, la eq. discretizada (15) es modificada para incorporar condiciones de frontera.
- Eqs. algebraicas lineales son el sist. resultante., y son resueltas para ϕ en los puntos nodales.
- use Matrices; hay varios métodos.

Ejemplo numerico:

Considere el problema de conducción de calor (fuente libre) en una varilla aislada cuyos extremos son mantenidos a constante temp. de 100°C y 500°C, respectivamente. El problema en 1D es governado por la siguiente Ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(C_\phi \frac{\partial T}{\partial x}\right) = 0 \qquad (16)$$



- Calcule la distribución T° en estado estable en la rod.

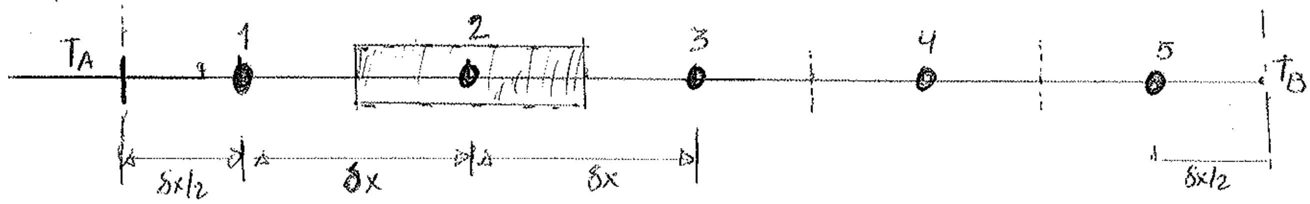
C_ϕ = conductividad Termica = 1000 W/m.K,

A = Area sección transversal = 10×10^{-3} m²

Solucion:

- Dividimos la longitud en 5 volumenes de control iguales. $\delta x = 0.1$ m.

La Malla usada es:



- Grid con 5 Nodos.

usando la ecuacion (14):

$$\left(\frac{C_e}{\delta x_{PE}} A_e + \frac{C_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) T_P = \left(\frac{C_w}{\delta x_{WP}} A_w\right) T_W + \left(\frac{C_e}{\delta x_{PE}} A_e\right) T_E \qquad (17)$$

La conductividad térmica $C_e = C_w = C$

Eusebio Zungo, Ph.D.

$\delta x =$ cte

$A_e = A_w = A =$ cte.

∴ La ecuación discretizada para los puntos nodales 2, 3 y 4 es:

$$\boxed{a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E} \quad (18)$$

donde

$$a_W = \frac{c}{\delta x} A \quad , \quad a_E = \frac{c}{\delta x} A \quad , \quad a_P = a_W + a_E$$

$$q_u \text{ y } q_p = 0$$

- Nodos (1) y (5) son Nodos frontera y requiere de ~~una~~ un análisis ~~atención~~ especial.
- Integrando la ecuación (16) sobre el V.C alrededor del Punto (1):

$$CA\left(\frac{T_E - T_P}{\delta x}\right) - CA\left(\frac{T_P - T_A}{\delta x/2}\right) = 0 \quad (17)$$

Eq. (17) muestra q' el flujo através de la frontera del V.C "A" ha sido Aprox. asumiendo una relación lineal entre T° en el punto de frontera A y el nodo P.

ordenando (17):

$$\left(\frac{c}{\delta x} A + \frac{2c}{\delta x} A\right) T_P = \overset{a_W}{0} \cdot T_W + \left(\frac{c}{\delta x} A\right) T_E + \left(\frac{2c}{\delta x} A\right) T_A \quad (18)$$

- comparando Eq. (18) con Eq. (14), podemos fácilmente identificar que la temperatura fijada (condición de frontera) entra al cálculo como un Término fuente: $(q_u + q_p T_P)$

$$\text{con} \quad q_u = \left(2CA/\delta x\right) T_A \quad \text{y} \quad q_p = -\frac{2c}{\delta x} A$$

Y que el link para la frontera OESTE (W) ha sido suprimida por el Coef. $a_W = 0$

. La Eq. (18) puede ser escrita como Eq. (15) para establecer la Ecuación discretizada para el nodo de frontera 1.

$$\boxed{a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + q_u} \quad (19)$$

Con $a_W = 0$, $a_E = \frac{c}{\delta x}A$, $a_P = a_W + a_E - q_p$

$$q_p = -\frac{2c}{\delta x} \quad , \quad q_u = \left(\frac{2c}{\delta x}A\right)T_A$$

El V.C que rodea al nodo 5 puede ser tratado de forma similar:

$$cA\left(\frac{T_B - T_P}{\delta x/2}\right) - cA\left(\frac{T_P - T_W}{\delta x}\right) = 0 \qquad (20)$$

similarmente q' en el nodo 1, una distribución de tempt. lineal es asumida entre el nodo P' y el punto de frontera B:

Eq. 20 puede ser ordenada como:

$$\left(\frac{c}{\delta x}A + \frac{2c}{\delta x}A\right)T_P = \left(\frac{c}{\delta x}A\right)T_W + \overset{a_E}{0}\cdot T_E + \left(\frac{2c}{\delta x}A\right)T_B$$

- La Eq. discretizada para el nodo frontera 5:

$$a_P T_P = a_W T_W + a_E T_E + q_u \qquad (21)$$

donde: $a_W = \frac{c}{\delta x}A$, $a_E = 0$, $a_p = a_W + a_E - q_p$

$$q_p = -\frac{2cA}{\delta x} \quad , \quad q_u = \left(\frac{2cA}{\delta x}\right)T_B$$

- El proceso de discretización establece una ecuación para cada punto nodal 1 a 5.
- Reemplazando los valores numericos: $\frac{cA}{\delta x} = 100$
- los coef. de cada ecuacion discretizada pueden ser facilmente resueltas.

$= \frac{c}{\delta x}A = \frac{(100)(10\times10)}{0.1} = 100$ $\quad 2(100)T_A \quad -2(100)$

nodo	a_W	a_E	q_u	q_p	$a_p = a_W + a_E - q_p$
1	0	100	$200T_A$	-200	300
2	100	100	0	0	200
3	100	100	0	0	200
4	100	100	0	0	200
5	100	0	$200T_B$	-200	300

$= \frac{cA}{\delta x}$ $\quad = 2(100)T_B \quad -2(100)$

Eusebio Engol. 8

Las ecuaciones lineales algebraicas son:

$$300T_1 = 100T_2 + 200T_A$$
$$200T_2 = 100T_1 + 100T_3$$
$$200T_3 = 100T_2 + 100T_4$$
$$200T_4 = 100T_3 + 100T_5$$
$$300T_5 = 100T_4 + 200T_B$$

22

Estas ecuaciones pueden ser arregladas en una matriz:

$$\begin{vmatrix} 300 & -100 & 0 & 0 & 0 \\ -100 & 200 & -100 & 0 & 0 \\ 0 & -100 & 200 & -100 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 200 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & -100 & 300 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 200T_A \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 200T_B \end{vmatrix}$$

Para $T_A = 100$ y $T_B = 500$, usando eliminación de Gauss:

$$\begin{vmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 140 \\ 220 \\ 300 \\ 380 \\ 460 \end{vmatrix}$$

- Ahora la Dist. solución exacta tiene una Dist. lineal:

$$T = 800x + 100.$$