Eusebio Ingol Blanco

continua Elemento finito...
desde Pag. 8 de la sesión anterior:

- Strong: Form.

$$K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -q(x), \quad \text{Para } 0<x<L$$

$$u(0) = u(L) = 0$$

- Weak form: (introduce Resumen en Pag. 8)

$$\int_0^L K \frac{du}{dx}\frac{dv}{dx}\,dx = \int_0^L q v\,dx$$

- Aproximaciones:
Nosotros usaremos 4 elementos de longitud "h"
$h = L/4$ y las funciones sombrero. (hat functions)

$$u(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x) = \underset{\sim}{\varphi}^T(x)\underset{\sim}{u}$$

$$v(x) = \sum_{i=1}^{N} u_i \varphi_i(x) = \underset{\sim}{V}^T \underset{\sim}{\varphi}(x)$$

donde:

$$\underset{\sim}{\varphi}^T(x) = \left[\varphi_1(x)\ \varphi_2(x)\ \varphi_3(x)\right]$$

- Insertando Aproximaciones en la weak form.

$$\int_0^L K \underbrace{V^T \varphi'(x)}_{\frac{dv}{dx}}\ \underbrace{\varphi'^T(x)\,\underset{\sim}{u}}_{\frac{du}{dx}}\,dx = q\int_0^L \underbrace{V^T\varphi(x)}_{V}\,dx$$

$$\rightarrow \cancel{V^T}\int_0^L K\,\varphi'(x)\,\varphi'^T(x)\,dx\,\underset{\sim}{u} = \cancel{V^T}q\int_0^L \underset{\sim}{\varphi}(x)\,dx$$

Esto se necesita mantener para $\underset{\sim}{V}$ arbitrario.

$$\underbrace{\int_0^L K\,\varphi'(x)\,\varphi'^T(x)\,dx}_{\mathbb{K}}\ \underset{\sim}{u} = \underbrace{q\int_0^L \varphi(x)\,dx}_{\mathbb{F}\ (\text{Force})}$$

Matriz de rigidez (stiffness matrix)

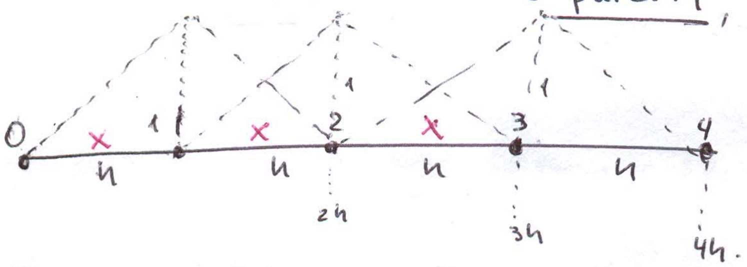
$$\rightarrow \underbrace{\mathbb{K}}_{3\times 3}\ \underbrace{\underset{\sim}{u}}_{3\times 1} = \underbrace{F}_{3\times 1}$$

$\mathbb{K}_{3\times 3} = \int_0^L \kappa \underbrace{\varphi'(x)}_{3\times 1} \underbrace{\varphi'^T(x)}_{1\times 3} dx$

Porq' $\mathbb{K}_{3\times 3}$ → Porque tenemos 3 desconocidas variables.

Eusebio Ingol

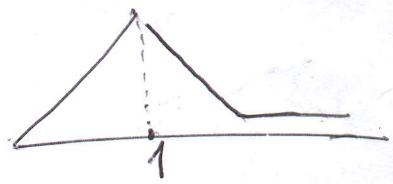
- debemos verificar la Esparcity, simetria.



Tenemos 3 desconocidas variables, u_1, u_2, u_3 esencialmente:

$$u(x) \approxeq \sum_{i=1}^{3} u_i \varphi_i(x)$$

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \frac{x}{h} & 0 \le x \le h \\ \frac{2h - x}{h} & h \le x \le 2h \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$



$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \frac{x-h}{h}, & h \le x \le 2h \\ \frac{3h-x}{h}, & 2h \le x \le 3h \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

$$\varphi_3(x) \begin{cases} \frac{x-2h}{h}, & 2h \le x \le 3h \\ \frac{4h-x}{h}, & 3h \le x \le 4h \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$$

Matrix de rigidez:

Recall: $K_{ij} = \int_0^L \kappa \varphi_i' \varphi_j' dx \rightarrow \left(\mathbb{K}_{3\times 3} = \int_0^L \kappa \varphi'(x) \varphi'^T(x) dx \right)$

$$\mathbb{K}_{ij} = \int_0^L \kappa \varphi_i' \varphi_j' dx = \underbrace{\int_0^h \kappa \varphi_i' \varphi_j' dx}_{\text{Integración sobre el elemento 1}} + \underbrace{\int_h^{2h} \kappa \varphi_i' \varphi_j' dx}_{\text{Integración sobre elemento 2.}} + \int_{2h}^{3h} \kappa \varphi_i' \varphi_j' dx + \cdots \int_{3h}^{4h}$$

Podemos llamar:

$$\sum_{i=1}^{4} K_{ij}^{(e)}$$

La matrix de rigidez es la sumatoria en todo el sistema.

donde

$$\mathbb{K}_{ij}^{(e)} = \int_e k\, \varphi_i' \varphi_j'\, dx$$

Nosotros vemos que la matrix de rigidez global puede ser obtenida como la sumatoria de rigidez individual (llamada rigidez del elemento) definida sobre el elemento individual, haciendo el dominio que sea una propiedad de la matrix elemento referida como SUMABILIDAD de la Rigidez.

Let me do some computations:

$$\mathbb{K}_{11} = \int_0^L k\, \varphi_1'^2\, dx = k\left[\int_0^h \varphi_1'^2 dx + \int_h^{2h} \varphi_1'^2 dx\right] = k\left[\frac{1}{h}+\frac{1}{h}\right] = \frac{2k}{h}$$

$$\varphi_1 = \frac{x}{h} \rightarrow \varphi_1' = \frac{1}{h}, \quad \varphi_1'^2 = \left(\frac{1}{h}\right)^2 = \frac{1}{h^2} \rightarrow$$

$$\int_0^h \varphi_1'^2 dx = \int_0^h \frac{1}{h^2} dx = \left.\frac{x}{h^2}\right|_0^h = \frac{h}{h^2} - 0 = \frac{1}{h}$$

$$\varphi_1 = \frac{2h-x}{h}, \quad \varphi_1' = -\frac{1}{h}, \quad \int_h^{2h} \varphi_1'^2 dx = \int_h^{2h}\left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx = \left.\frac{x}{h^2}\right|_h^{2h} = \frac{2h}{h^2} - \frac{h}{h^2} = \frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}$$

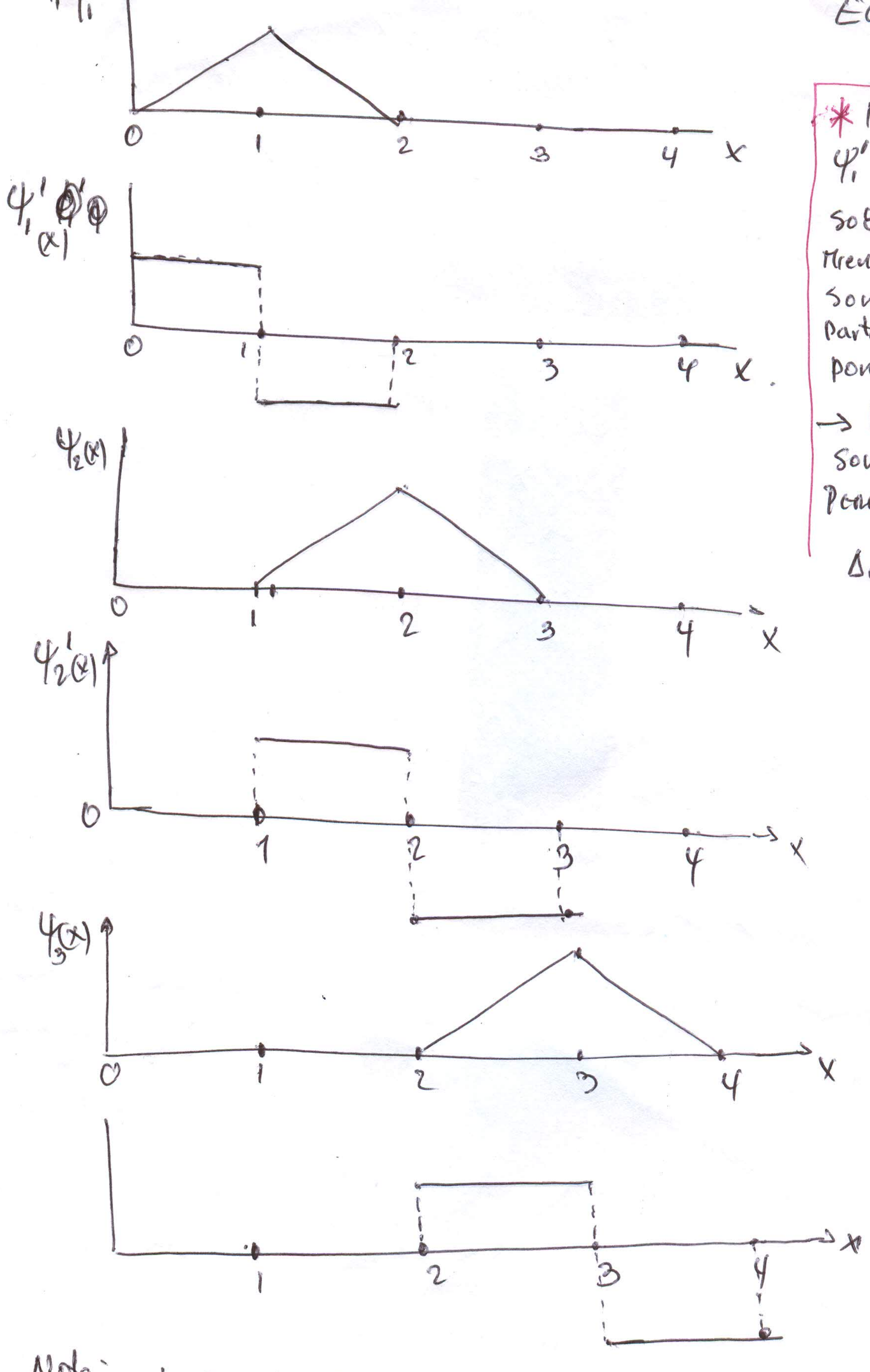
$$\mathbb{K}_{12} = \int_0^L k\, \varphi_1' \varphi_2'\, dx = k\int_h^{2h}\left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{k}{h}$$

$$\mathbb{K}_{21} = \mathbb{K}_{12} \quad (\text{simetrica } \mathbb{K})$$

$$\mathbb{K}_{13} = \int_0^L k\, \varphi_1' \varphi_3'\, dx = 0$$ Por sparsity o esparcidad de la matrix

? why.

$$\rightarrow \mathbb{K}_{31} = \mathbb{K}_{13} = 0$$



* los productos $\varphi_1 \varphi_2$ y $\varphi_1' \varphi_2'$ son no ceros sól[o] sobre el elemento 2, mientras que $\varphi_1 \varphi_3$ y $\varphi_1' \varphi_3'$ son ceros en todas partes (no se ~~traslap~~ superponen).

→ las integrales K_{12}, K_{21} son no zeros pero $K_{13} = K_{31} = 0$

Automáticamente.

Matriz sparsity cuando tiene ceros.

Note: ~~ϕ~~ φ_1 y φ_1' son diferentes de zero solo en los element[os] Ω_1 y Ω_2 adyacentes al nodo 1. Similarmente φ_2 y φ_2' son no ceros solo en los elementos Ω_2 y Ω_3 adyacente al nodo 2. φ_3 y φ_3' son no ceros en los elementos Ω_3 y Ω_4 adyacentos el Nodo 3. en consecuencia, los Productos $\varphi_i \varphi_j$ y $\varphi_i' \varphi_j'$ son no ceros solo donde los apoyos para las funciones bases φ_i y φ_j se superponen. For example: *

$$\mathbb{K}_{22} = \int_0^L k\, \varphi_2'^2\, dx = k\left(\int_h^{2h}\left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{2h}^{3h}\left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx\right) = \frac{2k}{h}$$

$$\mathbb{K}_{23} = \int_0^L k\, \varphi_2'\, \varphi_3'\, dx = k\int_{2h}^{3h}\left(-\frac{1}{h}\right)\left(\frac{1}{h}\right) dx = -\frac{k}{h}$$

Por simetria:

$$\mathbb{K}_{32} = \mathbb{K}_{23} = -\frac{k}{h}$$

$$\mathbb{K}_{33} = \int_0^L k\, \varphi_3'^2\, dx = k\left(\int_{2h}^{3h}\left(\frac{1}{h}\right)^2 dx + \int_{3h}^{4h}\left(-\frac{1}{h}\right)^2 dx\right) = \frac{2k}{h}$$

La matrix es: ensamble

$$\mathbb{K} = \frac{k}{h}\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

sparsity

Ahora: imagine como $\mathbb{K}$ podriamos aumentar si nosotros tenemos más elementos:

$$\mathbb{K} = \begin{vmatrix}
2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2
\end{vmatrix}$$

TRIGODIA NILIDAD

Eusebio Ingol

- La forma de la plantilla depende la selección de las funciones bas
- la sparsity de la matrix de rígidez es debido al hecho que las funciones bases han sido definidas ser ceros sobre la mayor parte del domonio.

Similarmente para $\mathbb{F}$:

$$\mathbb{F}_i = \int_0^L q\,\varphi_i\,dx$$

Asi:

$$\mathbb{F}_1 = q\int_0^L \varphi_i\,dx = q\left[\int_0^h \frac{x}{h}dx + \int_h^{2h}\left(\frac{2h-x}{h}\right)dx = qh\right.$$

$$\mathbb{F}_2 = q\int_0^L \varphi_2\,dx = q\left(\int_h^{2h}\left(\frac{x-h}{h}\right)dx + \int_{2h}^{3h}\left(\frac{3h-x}{h}\right)dx\right) = qh$$

$$\mathbb{F}_3 = qh.$$

$$\mathbb{F} = qh\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$$

Solución:

$$\mathbb{K}\underset{\sim}{u} = \mathbb{F} \rightarrow \frac{k}{h}\begin{vmatrix}2 & -1 & 0\\-1 & 2 & -1\\0 & -1 & 2\end{vmatrix}\begin{vmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{vmatrix} = qh\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{vmatrix} = \frac{qh^2}{1}\begin{vmatrix}3/2\\2\\3/2\end{vmatrix}$$

La solución se hace:

$$u(x) = qh^2\left[\frac{3}{2}\varphi_1(x) + 2\varphi_2(x) + \frac{3}{2}\varphi_3(x)\right]$$

Eusebio Ingol

$$u(x) = \frac{9h^2}{2K}\begin{cases} 3\dfrac{x}{h}, & 0 \le x \le h \\ 2 + \dfrac{x}{h} & h \le x \le 2h \\ 6 - x/h . & 2h \le x \le 3h \\ 12 - 3x/h & 3h \le x \le 4h \end{cases}$$

$\psi_1(x) = \dfrac{x}{h}$

$U_1(x) = 9h^2\,(3/2)$

$\to U_1\psi_1 = \frac{3}{2}9h^2\,\frac{x}{h}$

$= \frac{9h^2}{2}\left(3\frac{x}{h}\right)$

7

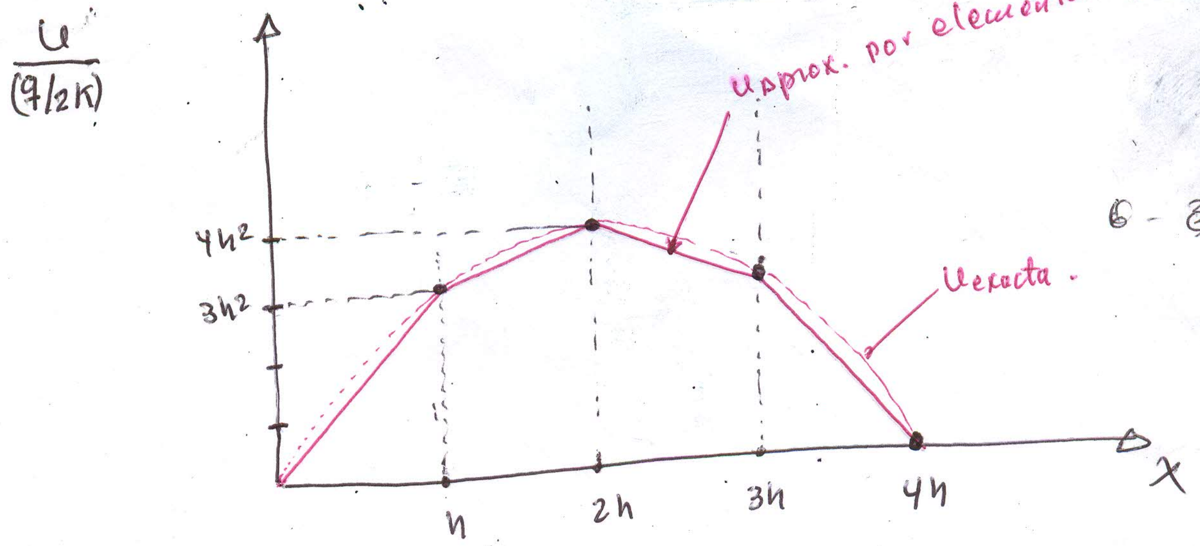
similarmente:

$$K\,u'(x) = \frac{9h}{2}\begin{cases} 3, & 0 \le x \le h. \\ 1, & h \le x \le 2h \\ -1, & 2h \le x \le 3h. \\ -3, & 3h \le x \le 4h. \end{cases}$$

Recall:

$$u_{exacta}(x) = \frac{9\cancel{x}}{2K}\left(4h - x\right)$$

$$K\,u'_{exacta}(x) = \frac{9h}{2K}\left(4 - 2\frac{x}{h}\right)$$



$6 - \frac{3h}{h} = 3.$

Note: que la solución exacta coincide en los puntos nodales esto es realmente ~~es~~ en 1D conditions.

- En general, nosotros no esperamos valores exactos en los nodos.

Derivación u_{exacta}: Eusebio INGOL

$$k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -q \qquad u(0)=0$$
$$\frac{\partial u}{\partial x}(L)=0$$

$$\downarrow$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x} = -qx + c_1 \longrightarrow k\,u(x) = -q\frac{x^2}{2} + c_1 x + c_2$$

$$u(0)=0 \rightarrow c_2 = 0$$

$$k\frac{\partial u}{\partial x}(L)=0 \longrightarrow -qL + c_1 = 0 \rightarrow c_1 = qL$$

$$\rightarrow u_{exac}(x) = \frac{1}{k}\left(-q\frac{x^2}{2} + qLx\right)$$

$$= \frac{q}{2k}x\left(2L - x\right)$$

Now: Para $L = 2h$.

$$u_{exac}(x) = \frac{qx}{2k}\left(4h - x\right)$$

TAREA:

$$D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + V\frac{\partial u}{\partial x} = -qx. \qquad \text{use 4 elementos}$$

condiciones frontera: $u(0)=0$
$u(L)=0$