Elementos Finitos

Eusebio Ingol, PhD.

dejeme introducir un poco sobre "Funciones de Base Global o "Global basis Function"

↳ pueden representar funciones como como series infinitas:

e.g:
$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \varphi_i(x)$$

a) strong form ó PDE:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial h}{\partial x}\right) + q = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial h}{\partial x}\right) = -q.$$

b) weak form:
" Vamos a ver como se deduce esto "

$$\int_0^L k \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^L q v \, dx.$$

with
$h(0) = 0$
$h(L) = 0$
$v(0) = v(L) = 0$

Para aproximar esta integral podemos usar funciones globales como las descritas arriba.

$$u(x) = u_N(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x)$$

↑ solución

↳ Función de entrenamiento.

función de ~~prueba~~ Peso

$$v(x) = v_N(x) = \sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i(x).$$

Si usamos dos funciones, por ejemplo:

$$u(x) = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2$$

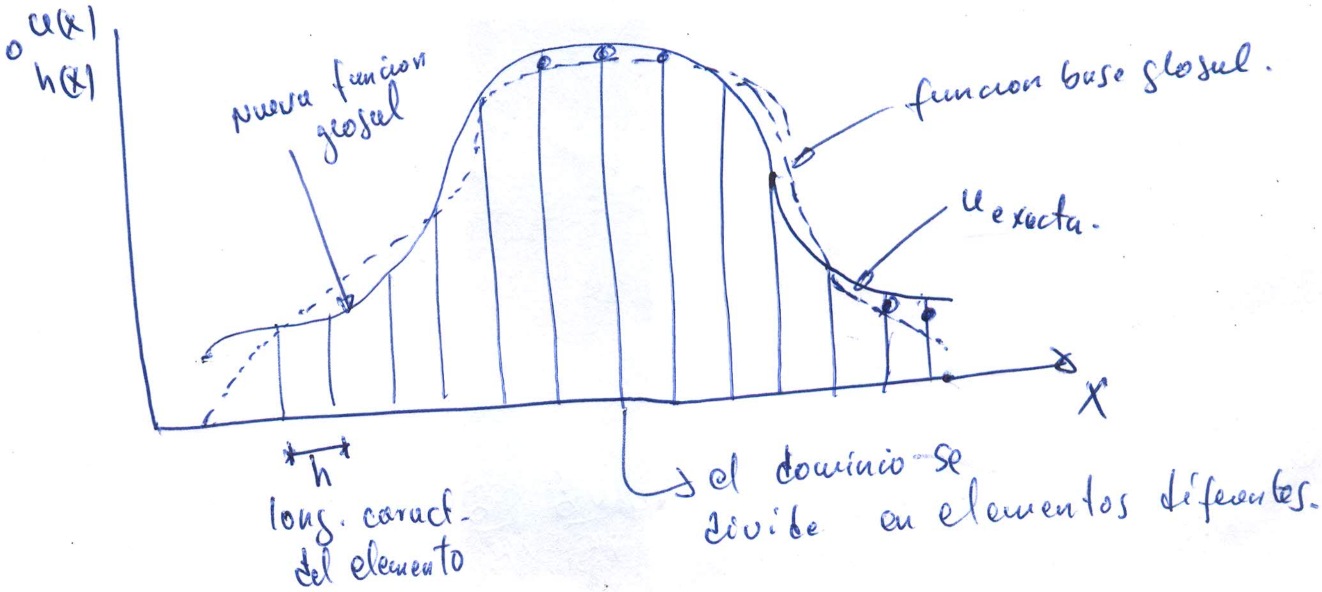
c) Se introducen ~~est~~ aprox. a la weak form:

$$\int_0^L k \left(\sum_{i=1}^{N} c_j \varphi_j'(x) \right) \left(\sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i'(x) \right) dx = \int_0^L q \sum_{i=1}^{N} b_i \varphi_i(x) \, dx$$

Hay una serie de procesos q' no son el objetivo en esta clase.

Para abandonar las funciones bases globales y en cambio adoptar por funciones bases que son definidas Piecewise functions sobre el dominio de interes, usamos elementos finitos.

Piecewise functions: es un función cuya definición cambia dependiendo del valor de independiente variable.

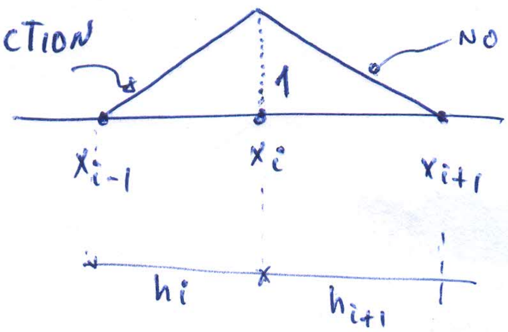


- características de las funciones bases:
  - deberían ser definidas "Piecewise" y ser funciones simples
  - deben ser de bajo orden (para facilitar los calculos)
  - deben ser escogidas tal q' el coeficiente C_i coincida con la solución en los puntos nodales.
    C_i tendría un significado fisico.
  - Matemáticamente:
    - deben ser smooth-enough (lo suficiente suave) en el dominio
    - deberían ~~de~~ ser continuas en las fronteras del elemento.
    - deben ser completas: (necesitan ~~ser~~ capaces para representar constantes y monomios lineales).

continuas function: pequeños cambios en el ingreso produce pequeños cambios en la salida

Tenemos un tramo de canal o sección de un acuífero:

HAT - FUNCTION



no zero sobre la region pequeña pero zero en todas las demas.

hat-function:

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}} & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 , & \text{elsewhere} \end{cases}$$

- Note: que $\varphi_i(x)$ es todavia una funcion global
- entonces tenemos que realizar un test de integrabilidad:

$$\varphi_i'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i \\ -\dfrac{1}{h_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0 , & \text{elsewher} \end{cases}$$

$$\int_0^L \varphi_i'^2 \, dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \varphi_i'^2 \, dx + \int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi_i'^2 \, dx =$$

$$= \left(\frac{1}{h_i}\right)^2 h_i + \left(\frac{-1}{h_{i+1}}\right) h_{i+1} = \frac{1}{h_i} + \frac{1}{h_{i+1}} < \infty .$$

$$\varphi_i(x_j) = \begin{cases} \text{si } i=j \rightarrow \varphi_i(x_i)=1 \\ \text{si } i\neq j \rightarrow \varphi_i(x_j)=0 \end{cases} \Big\} \delta_{ij}$$

de manera que:

$$U_N(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x) \rightarrow U_N(x_j) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x_j) =$$

$$\sum_{i=1}^{N} c_i \delta_{ij} = c_j$$

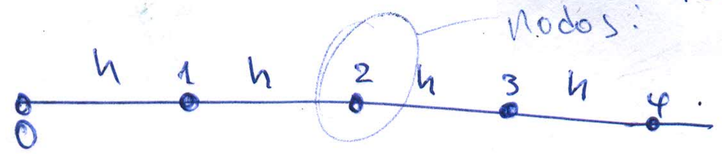
$i=j$

$c_j \delta_{ij} = 1$

↳ Por definición $U_N(x_j) = c_j$

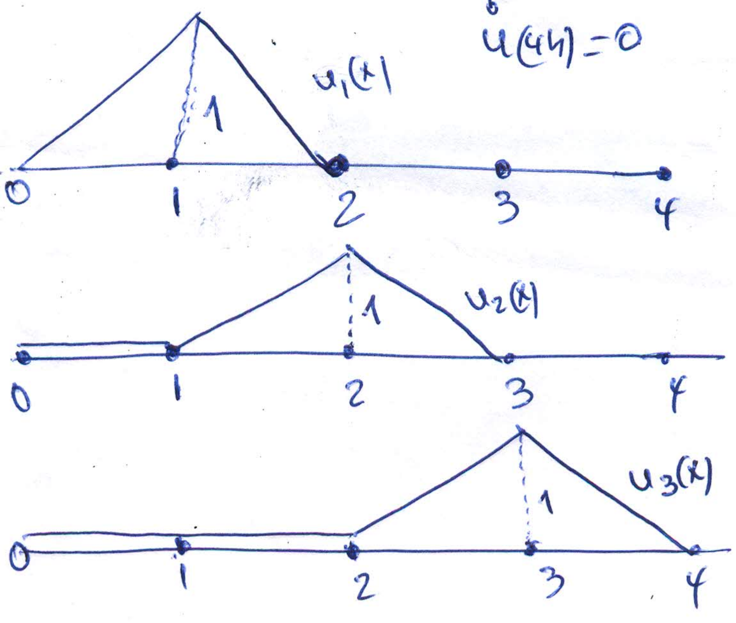
$$\rightarrow \quad U_N(x) = \sum_{i=1}^{N} c_i \varphi_i(x), \quad \text{Donde } c_i = U_N(x_i)$$

Vamos a tratar de poner todo junto ahora:



$u(0) = u(L) = u(h) = 0$

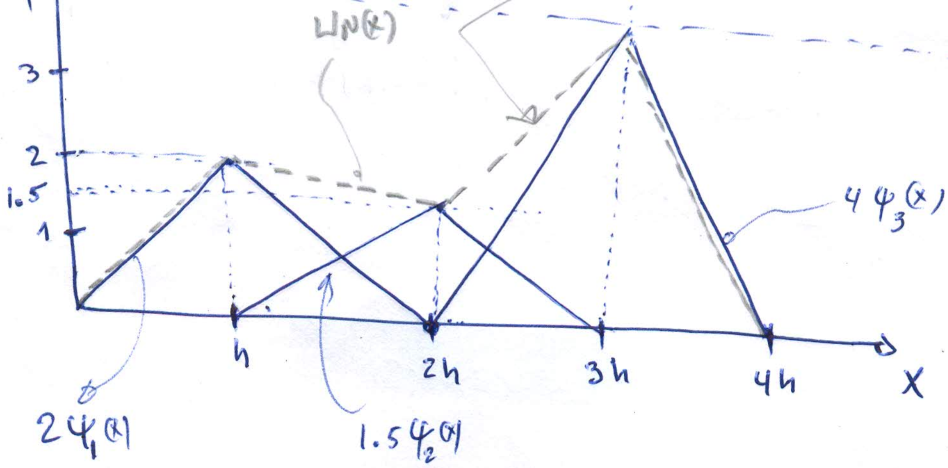
$u(4h) = 0$



- ahora deseamos suponer que la solución fue:

$u_1 = 2, \quad u_2 = 1.5 \quad u_3 = 4$

$$\rightarrow U_N(x) = \sum_{i=1}^{3} c_i \varphi_i(x) = 2\varphi_1(x) + 1.5\varphi_2(x) + 4\varphi_3(x)$$



<u>1D Problem</u>:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -q$$

$$\frac{\partial k}{\partial x}\frac{\partial h}{\partial x} + k\frac{\partial^2 h^2}{\partial x^2} = -q.$$

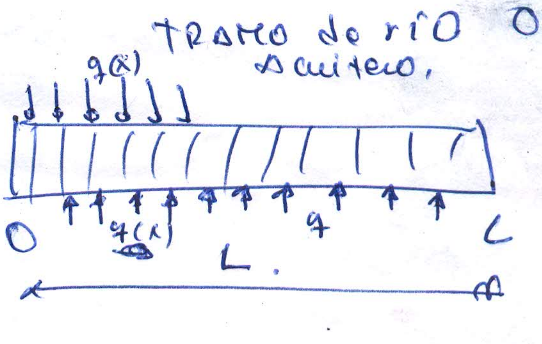
si $K = cte$:

$$k\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = -q.$$

Esta ~~PDE~~ PDE ~~ecuacion~~ puede ser modelada como: difusión: asumiendo que $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$. concentracion,

$$\cancel{\frac{\partial f}{\partial t}} + D\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0.$$

$$\boxed{K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -q(x)}$$



$0 < X < L$

$u(0) = u(L) = 0$

1) Weak Form:

a) ~~tom~~ $\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\right) = -q(x) \qquad 0 < X < L$ (1)

a) tomamos (1) y obtenemos el residuo $R(x)$

$$R(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial h}{\partial x}\right) + q(x) = 0$$

Multiplicar el residuo por cada ...
V(x). (Nosotros discutiremos las condiciones de admisibilidad + adelante).

$$V \frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial h}{\partial x}\right) + Vq = 0.$$

c) Integramos sobre el dominio

$$\int_0^L \underbrace{V}_{u} \overbrace{\frac{\partial}{\partial x}\left(k \frac{\partial h}{\partial x}\right) dx}^{dv} + \int_0^L V q dx = 0.$$

Haciendo → $h = u$.

d) integración Por partes.

$u = V.$

$du = \frac{dV}{\partial x} dx$

$dv = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx$

$v = k \int \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} dx$

$v = k \frac{du}{dx}$

aplicamos: $\boxed{\int u dv = (uv) - \int v du}$ int. by partes.

Integramos sobre el dominio.

$$\left(V k \frac{du}{\partial x}\right|_0^L - \int_0^L k \frac{du}{\partial x}\frac{dV}{\partial x} dx + \int_0^L V q dx = 0$$

→ $\begin{pmatrix} V(0) = 0 \\ V(L) = 0 \end{pmatrix}$ → Partes de las condiciones de admisibilidad Para V(x).

Haciendo esto:

$$\left[\cancel{V(L)}^{0} k \frac{\partial u}{\partial x}(L) - \cancel{V(0)}^{0} k \frac{du}{\partial x}(0)\right] - \int_0^L k \frac{du}{\partial x}\frac{dV}{\partial x} + \int_0^L qVdx =$$

$$= - \int_0^L k \frac{du}{dx}\frac{dV}{\partial x}dx + \int_0^L qVdx = 0 \rightarrow \int_0^L k \frac{du}{\partial x}\frac{dV}{\partial x}dx = \int_0^L qVdx.$$

Weak form

*) el requerimiento de admisibilidad para $V(x)$ cuando u o la variable principal satisface satisface las condiciones esenciales (ejm, $u(0)=5$, $u(L)=3.5$ etc) → DIRICHLET BOUNDARY CONDITIONS.

Entonces $V(x)$ debe obligatoriamente, satisfacer condiciones esenciales homogeneas en la misma localización i.e:

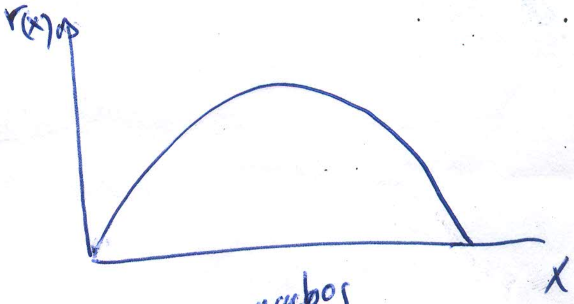
si $u(0)=3$, then $V(0)=0$.

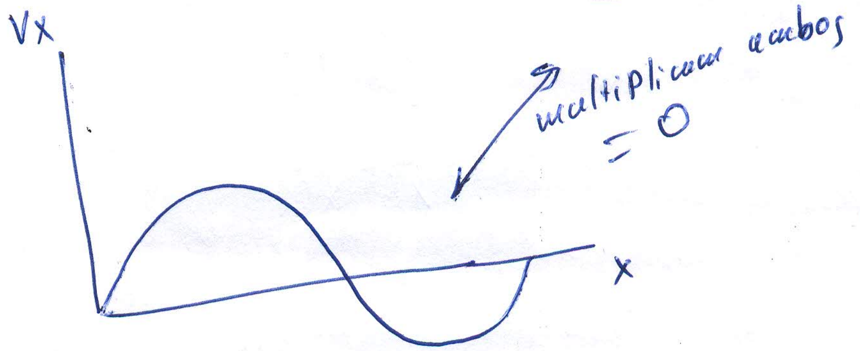
si $u(L)=0.2$, $V(L)=0$

$$\int_0^L k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx < \alpha. \qquad \text{o} \qquad \int_0^L k\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx < \alpha$$

.. en la ecuación weak form.

$$r(x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) + q$$





$$\int r(x)\,v(x) = 0$$

- requerimos que el residuo pesado $r(x)$ de la ecuación diferencial satisfaga sobre el PROMEDIO sobre el DOMINIO de interes.
- PESADO, porque nosotros usamos $V(x)$, ejm. un peso para multiplicar el residuo.
- Residuo: porque opera sobre el residuo de la ecuación diferencial, el cual bajo una perfecta selección para $u(x)$

debe ser igual a "0"

- sobre el PROMEDIO, Porque integramos de 0 a L

Resumen Para obtener la Weak Form.

a) comenzar con la PDE y la forma Residuo

b) $r(x) = 0$

c) Multiplicar $r(x)$ por $V(x)$ e integrar sobre el Dominio de interes.

d) Integración por partes y tome en cuenta las condiciones de frontera Para $u(x)$ y $V(x)$.

$V(x)$: Peso o Funcion test.

TAREA.

Derive la correspondiente Weak Form de la siguiente strong Form, usando un enfoque del Residuo Pesado (weighted residual Approach)

$$(2-x)\frac{d^2u(x)}{dx^2} - \frac{du(x)}{dx} + u(x) = f(x),$$

$$0 < x < 1$$

con $u(0) = u(1) = 0$

* APROXIMACIONES A LA WEAK FORM